i) $U_{n+1}=f(U_n)$

ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\ell\in[1,2]$

iii) f continue en ℓ car $[1,2]\subset]-3,+\infty[$

Donc $f(\ell)=\ell\Leftrightarrow f(\ell)-\ell=0$

$\Leftrightarrow f(\ell)=0$ D'où $\boxed{\ell=\alpha}$

Exercice 9

$$\begin{cases}U_0=1\\ U_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2+1}, n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1) a/ par récurrence sur $\mathbb{N}$

i) $n=0: 1\le U_0=1\le\sqrt{2}$ vrai

ii) supposons que $1\le U_n\le\sqrt{2}$

et montrons que $1\le U_{n+1}\le\sqrt{2}$

En effet on a : $1\le U_n\le\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 1\le U_n^2\le 2\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}U_n^2\le 1\Leftrightarrow\frac{3}{2}\le\frac{1}{2}U_n^2+1\le 2$

$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{3}{2}}\le\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2+1}\le\sqrt{2}$

Or $\sqrt{\frac{3}{2}}\ge\sqrt{1}=1$ donc $1\le U_{n+1}\le\sqrt{2}$

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}: 1\le U_n\le\sqrt{2}$

b/ on a : $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$U_{n+1}-U_n=\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2+1}-U_n$$

$$=\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2+1}-U_n\right)\left(\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2+1}+U_n\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2+1}+1}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}U_n^2+1-U_n^2}{\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2+1}+1}=\frac{1-\frac{1}{2}U_n^2}{\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2+1}+1}$$

$$=\frac{2-U_n^2}{2\left[\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2+1}+1\right]}=\frac{\left(\sqrt{2}-U_n\right)\left(\sqrt{2}-U_n\right)}{2\left[\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2+1}+1\right]}$$

Or on sait que $1\le U_n\le\sqrt{2}$

Donc $\sqrt{2}-U_n\ge 0$ et $\sqrt{2}+U_n\ge 0$

et $2\left[\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2+1}+1\right]\ge 0$ et par suite $U_{n+1}-U_n\ge 0$

Finalement : (U_n) est une suite croissante.

c/ (U_n) est une suite croissante et majorée par $\sqrt{2}$ donc (U_n) est une suite convergente.

2) $V_n=U_n^2-2, n\in\mathbb{N}$

a/ $\forall n\in\mathbb{N}$ on a :

$$V_{n+1}=U_{n+1}^2-2=\sqrt{\frac{1}{2}U_n^2+1}^2-2$$

$$=\frac{1}{2}U_n^2+1-2=\frac{1}{2}U_n^2-1$$

$$=\frac{1}{2}\left(U_n^2-2\right)$$

$V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n$ Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0=U_0^2-2=-1$.

b/ on a : $V_n=V_0.q^n$ donc $\boxed{V_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n}n\in\mathbb{N}$

Aussi on a : $V_n=U_n^2-2$ donc $U_n^2=V_n+2$

C'est-à-dire $U_n=\sqrt{V_n+2}, n\in\mathbb{N}$

D'où $\boxed{U_n=\sqrt{-\left(\frac{1}{2}\right)^n+2}, n\in\mathbb{N}}$

c/ */ on a (V_n) est une suite géométrique

de raison $q=\frac{1}{2}\in]-1,1[$ Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=0$

*/ $U_n=\sqrt{V_n+2}$ d'où

$\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{V_n+2}=\sqrt{2}$

d/ $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}U_K^2=\sum_{K=0}^{K=N}(V_k+2)$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn